Álgebra Lineal y Matemática Discreta - Curso 2020/21
Parte I: Álgebra de Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Sean las matrices A, B, C y D dadas por: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ Calcule los resultados de las siguientes operaciones si están definidos. Si no están definidos indique por qué:

   (a) AB (b) $-3B$ (c) AC (d) CD (e) $-2AC + 5B$

   Solución:

   (a) $AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & -3 \\ 4 & -1 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $-3B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -9 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, (c) $AC = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 17 & -3 \end{pmatrix}$,

   (d) $CD = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix}$, (e) No se puede realizar ya que los órdenes de -2AC y 5B no coinciden.

2. Calcule las matrices traspuestas de las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

   Solución:

   $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \\ 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

3. Decir si la matriz $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

   Solución: Efectivamente, si hacemos el producto AC=I y CA=I, luego C es la inversa de A.

4. Indique si las siguientes matrices son elementales: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Solución: Las 3 matrices son elementales, ya que son matrices identidad a las que se les ha aplicado una única operación de fila o columna. A la primera se ha multiplicado por -2 la segunda fila, a la segunda se ha intercambiado la segunda fila con la cuarta, y a la tercera se la he sumado a la primera fila 5 veces la tercera.

5. Dadas la matrices cuadradas A y B: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

   Calcular sus inversas A^{-1} y B^{-1} usando las matrices aumentadas [A I] y [B I] respectivamente, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión que ambas.

Solución: En el caso de A, obtenemos si operamos obtenemos una fila de ceros y no podemos tener la matriz identidad. En el caso de B la matriz inversa es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 & 2/3 \\ -17/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

6. Responda y razone las respuestas a las siguientes preguntas:

    a) ¿Puede una matriz cuadrada con dos columnas iguales ser invertible?

    b) ¿Puede una matriz cuadrada con una fila de ceros ser invertible?

    c) ¿Puede ser invertible una matriz 4x4 cuando sus columnas no generan a $\mathbb{R}^4$?

    Solución:

    a) No, ya que necesitamos que el rango sea máximo y si tiene dos columnas iguales ya no lo es. Además, el determinante sería 0.

    b) No, por la misma razón que antes.

    c) No, porque si no generan $\mathbb{R}^4$ entonces no son linealmente independientes, el rango no es máximo y el determinante es 0, por lo que la inversa no existe.

7. Calcule la inversa de la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    Solución:
    $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. De acuerdo con el resultado obtenido en ejercicio anterior, comente cómo será la solución del siguiente sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la matriz A de dicho ejercicio: $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

    Solución: La solución es el (0,0,0), ya que la matriz de coeficientes es la matriz A. Como tiene inversa, la única solución del sistema es $A^{-1}b$. Como $b = 0$, entonces la solución al sistema homogéneo es 0.

9. Indicar para cada una de las siguientes ecuaciones si son o no lineales:

    a) $3x + 4y = 24$

    b) $x_1 - x_2 + 5x_3 + (\sqrt{2})x_4 = 1$

    c) $e^2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$

    d) $3x^2 + 4y = 24$

    e) $x_1 - x_2 + 5x_3 + 2\sqrt{x_4} = 1$

    f) $e^{2x_1} - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$

    g) $x_1x_2 + 5x_3 = 2$

    Solución:

    a) Sí

    b) Sí

    c) Sí

    d) No

    e) No

    f) No

    g) No

10. Comente la solución del sistema: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

Solución: Claramente es un sistema incompatible, ya que la misma ecuación tiene dos soluciones distintas.

11. Indique si las 3 rectas siguientes tienen un punto de intersección común. Explique la respuesta $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 6x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 7 \end{cases}$

Solución: Si resolvemos primero (por ejemplo) las dos primeras ecuaciones, y vemos si esa solución está en la tercera recta podemos ver si se cortan en un punto. Al hacer esto, vemos que no, el punto obtenido de resolver las dos primeras no pertenece a la tercera recta, luego es un sistema incompatible y no se cortan en un mismo punto.

12. Conseguir un sistema escalonado mediante eliminación (o reducción) gaussiana equivalente a $\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

Indicar si tiene solución.

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$, Es incompatible porque la última fila significa que 0=5/2.

13. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan, es decir obteniendo una forma escalonada reducida de dicho sistema $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Solución: $(x_1, x_2, x_3) = (-23, -3, 13)$

14. Transforme la siguiente matriz ampliada, correspondiente a un sistema lineal, primero en su forma escalonada y después en su forma escalonada reducida. Resuelva dicho sistema. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

15. La matriz aumentada de un sistema lineal se transformó, mediante operaciones de fila, en la forma que se indica a continuación. Determine si el sistema es compatible $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Si seguimos haciendo operaciones obtenemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto es compatible determinado con solución (-17/2,1/2,0)

16. ¿Para qué valores de h y k es consistente el siguiente sistema? $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ -6x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$. Compruebe que el rango de la matriz de coeficientes A calculado por filas coincide con el rango calculado por columnas.

Solución: Si cogemos la matriz ampliada del sistema y aplicamos Gauss-Jordan obtenemos que si $k + 3h \neq 0$ el sistema es incompatible y si $k + 3h = 0$ es compatible.

17. Calcular el rango de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & -0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ Responda a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas filas linealmente independientes tiene la matriz? ¿y columnas?
- Si dicha matriz fuese la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones. ¿Cuántas soluciones tendría el sistema según el Teorema de Rouché-Frobenius?

Solución: El rango de la matriz A es 3. Obviamente tiene 3 filas y columnas linealmente independientes, porque el rango por filas y columnas coincide.
Si fuera una matriz ampliada, A tendría rango 2 y la matriz ampliada 3, por lo que el sistema es incompatible.

18. Indique el tipo de solución que tiene el sistema deduciéndolo mediante el Teorema de Rouché-Frobenius $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \end{array} \right.$

    Solución: La matriz de coeficientes tiene rango 1 y la ampliada 2, por lo que es incompatible.

19. Calcule los siguientes determinantes utilizando un desarrollo de adjuntos a lo largo de la primera fila: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

    Solución: El determinante de A es -5 y el de B es 4.

20. Calcule el determinante de la siguiente matriz, aplicando un desarrollo por adjuntos y operaciones elementales por filas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

    Solución: Det(A)=-30

21. Calcule el determinante de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

    Solución: Det(A)=-6

22. Indique cuáles de las siguientes matrices son invertibles mediante el valor de su determinantes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

    Solución: A y B son invertibles porque su determinante es distinto de 0 y C es no invertible porque su determinante es 0.

23. Calcule la inversa de la matriz : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ a partir de la matriz adjunta. ¿Tiene solución única el sistema de ecuaciones $Ax = b$? Calcúlela a partir de A^{-1}

    Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

    Si tiene solución única, ya que es $A^{-1}b$.

24. Calcule la matriz inversa de A empleando la matriz adjunta, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

    Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$

25. Use la regla de Cramer para resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 = 6 \\ -5x_1 + 4x_2 = 8 \end{array} \right.$

    Solución: La solución es (20,27).

26. Calcule el rango de la siguiente matriz usando determinantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

Solución: El rango es 3

27. Resolver los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rr} 2x - 5y + 4z + u - v = & 3 \\ x - 2y + z - u + v = & 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v = & 10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rr} 4x - 3y + 2z + u = & 3 \\ x - 2y + z + 2u = & -2 \\ 4x - y + z - u - v = & 5 \\ 2x + 3y - z - 4v = & 9 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rr} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = & -4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} 7x_2 + x_3 = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = & 7 \\ -9x_1 - 5x_2 - 2x_3 = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rr} x - 16u + 19v = & 76 \\ y - 9u + 11v = & 45 \\ z - 3u + 4v = & 19 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rr} x - v = & -24/5 \\ y + 1/5v = & 7 \\ z + 13/5v = & 12 \\ u - 3/5v = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rr} x_1 + 2x_4 = & -49 \\ x_2 - x_4 = & 38 \\ x_3 = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rr} x_2 + 1/7x_3 = & 1/7 \\ x_1 + 4/3x_2 + 1/3x_3 = & 7/3 \\ 0 = & 22 \end{array}\right.$$

A partir de estos sistemas escalonados reducidos, obtener la solución.

28. Utiliza el método de Gauss para discutir las distintas soluciones de los siguientes sistemas según los distintos valores de los parámetros $a, b \in \mathrm{R}$.

$$a)\left\{\begin{array}{rr} 2x + 6y + az = & 12 \\ 3x + (a+5)y + 6z = & b - a \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rl} ax + bz = & 2 \\ ax + ay + 4z = & 4 \\ ax + 2z = & b \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rl} ax + y + z = & 1 \\ x + ay + z = & a \\ x + y + az = & a^2 \\ (a+1)y + z = & a+1 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rl} 2x + by = & 1 \\ -2x + 2y + az = & 1 \\ 2x - 2y + bz = & a + b - 1 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rl} x - z = & 2 \\ 2x + ay - 3z = & 4 \\ -x + a^2 z = & a - 3 \\ 3x + ay - 4z = & 6 \end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{rr} (2+a)x + ay + 2z = & 2a - 2 \\ 2x + (2-a)y = & 0 \\ (a+1)x + (a+1)z = & a - 1 \end{array}\right.$$

$$g)\left\{\begin{array}{rl} 2x + ay + z = & 0 \\ 2x - 2y + z = & 0 \\ bx + 2y - 4z = & 0 \\ 4x + 2y + 7z = & 0 \end{array}\right. \qquad h)\left\{\begin{array}{rl} x + ay + bz = & 1 \\ ax + by + z = & b \\ x + aby + z = & a \end{array}\right.$$

Solución:

a) Si $a \neq 4$ el sistema es compatible indeterminado.
Si $a = 4$ y $b = 22$ el sistema es compatible indeterminado.
Si $a = 4$ y $b \neq 22$ el sistema es incompatible.

b) Si $a \neq 0$ y $b \neq 2$ el sistema es compatible determinado.
Si $a = 0$ y $b \neq 2$ el sistema es incompatible.
Si $b = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

c) Si $a \neq 1, -2$ el sistema es compatible determinado.
Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.
Si $a = -2$ el sistema es incompatible.

d) Si $b \neq -2$ y $b + a \neq 0$ el sistema es compatible determinado.
Si $b = -2$ y $a \neq 2$ el sistema es incompatible.
Si $b = -2$ y $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.
Si $b + a = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

e) Si $a \neq 0, -1, 1$ el sistema es compatible determinado.
Si $a = 0, -1$ el sistema es incompatible.
Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

f) Si $a \neq 0, -1$ el sistema es compatible determinado.
Si $a = -1$ el sistema es incompatible.
Si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

g) Si $a = -2$ y $b \neq -2$ el sistema es compatible determinado.
Si $a = -2$ y $b = -2$ el sistema es incompatible.
Si $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado.

h) Si $b = 1$ y $a \neq 1$ el sistema es incompatible.
Si $b = 1$ y $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.
Si $b \neq 1$ y $a = 1$ el sistema es incompatible.
Si $b = 0$ y $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado.
Si $b \neq 0$ y $a = 0$ el sistema es compatible determinado.
Si $b \neq 1$ y $a \neq 0, 1$ el sistema es compatible determinado.